Universidad Nacional de Ingeniería
Facultad de Ingeniería Mecánica
Área de Ciencias Básicas y Humanidades

24-02-07
P.A. 2006-3

SOLUCIONARIO DEL EXAMEN PARCIAL DE CALCULO NUMERICO MB-535

Solo se permite el uso de una hoja de formulario

Problema 1

a) Escriba la función ***localiza*** que permite ubicar intervalos que contengan raíces de una función ***'fun'*** en el intervalo ***[a,b]*** con ***'n'*** particiones iguales y debe retornar una matriz de mx2, con los 'm' intervalos que contienen las raíces.

function [z,m]=localiza(fun,a,b,n)

Ejm. $a=-5 \quad b=5 \quad n=10 \quad z=\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \quad m=3$

Solución

```
function [z,m]=localiza(fun,a,b,n)
z=[];
x=a:(b-a)/n:b;
y=feval(fun,x);
m=0;
for i=1:length(x)-1
    if y(i)*y(i+1)<0
        z=[z; x(i) x(i+1)];
        m=m+1;
    end
end
```

b) Represente el número $163\frac{1}{7}$ en simple precisión (IEEE-754), muestre el número en representación de punto flotante normalizada y los 32 bits de almacenamiento.

Solución

$163.1428571428571=10100011.00\overline{100100100100100}\ldots_2$

$=1.01000110010010010010010\text{x}2^7$

$E-127=7 \quad E=134=10000110_2$

0	10000110	01000110010010010010010

c) Sea el siguiente sistema triangular de orden 'n':

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}$$

Escriba una función para obtener el vector solución x, para n dado, por sustitución directa, use la cabecera: ***function x=resuelve(n)***

Solución

```
function x=resuelve(n)
A=2*diag(ones(n,1))-diag(ones(n-1,1),-1);
b=ones(n,1);
x=zeros(n,1);
x(1)=b(1)/A(1,1);
for k=2:n
   x(k)=(b(k)-A(k,1:k-1)*x(1:k-1))/A(k,k);
end
```

d) Dado el siguiente sistema: $\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ k & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Para que valores de 'k' tanto los métodos de Jacobi como Gauss-Seidel son convergentes?

Solución

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ k & 2 \end{bmatrix}$ $Tj = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -k/2 & 0 \end{bmatrix}$ $\rho(Tj) = \sqrt{\dfrac{3|k|}{2}}$ converge para: $-2/3 < k < 2/3$

$Tg = (D-L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 0 & 3k/2 \end{bmatrix}$ $\rho(Tg) = \dfrac{3|k|}{2}$ converge para: $-2/3 < k < 2/3$

e) Diagonalizar la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, si es posible.

Solución

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$P(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 14$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{47}}{2} i$$

$$P = \begin{bmatrix} -0.6478 - 0.0945i & -0.6478 + 0.0945i \\ 0.7559i & -0.7559i \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 1.5000 + 3.4278i & 0 \\ 0 & 1.5000 - 3.4278i \end{bmatrix}$$

$$D = P^{-1}AP$$

Problema 2

Para resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Se propone el siguiente método iterativo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

(a) Para que valores de a, b y c el método propuesto será convergente cualesquiera sean los vectores $(x_0, y_0, z_0)^T$ y $(b_1, b_2, b_3)^T$.

(b) Realice 02 iteraciones para a=0.5, b=2, c=0.5 y $(x_0, y_0, z_0)^T = (1,0,1)^T$ $(b_1, b_2, b_3)^T = (1,1,1)^T$ y estime el error.

(c) Concuerdan los resultados obtenidos en a) y b).

Solución

(a)

Tenemos que hallar el radio espectral de la matriz de iteración: T

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -a & 0 & 0 \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ b-a & c & 0 \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$$

Luego, det(T-λI)= - λ(λ-a)(c-λ)=0 y por lo tanto:

ρ(T)=Máx{0,|a|,|c| }

Para que el método iterativo converja, necesitamos que ρ(T)<1, y esto se cumple cuando |a|<1, |c|<1

(b)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \\ z_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 3/2 & 1/2 & 0 \\ -2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$$

Iteración 1:

x =

1/2
3/2
-1

$$Err = \|x_1 - x_0\|_\infty = 1.5$$

Iteración 2:

x =

1/4
3/2
-3/4

$$Err = \|x_2 - x_1\|_\infty = 0.25$$

(c)
Los resultados concuerdan, por los valores de a, b y c convergen ya que el error disminuye.

Problema 3
Sea la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Hallar el espectro de la matriz A.
b) Es la matriz A diagonalizable? Justifique su respuesta.
c) Obtener el valor propio mas a cercano al escalar ***q=-2***, usando 03 iteraciones del método de la potencia inversa con desplazamiento a partir de $[1\ 0\ 0]^T$ y estime el error.

Solución
a)

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ -3 & 5 & -1-\lambda \end{bmatrix} = -\lambda^3 - \lambda^2 + 5\lambda - 3$$

$$\varepsilon(A) = \{1, 1, -3\}$$

b)

$$ma(\lambda = -3) = 1 \quad mg(\lambda = -3) = 3 - Rango(A + 3I) = 3 - 2 = 1$$
$$ma(\lambda = 1) = 2 \quad mg(\lambda = 1) = 3 - Rango(A - I) = 3 - 2 = 1$$

Dado que:

$$ma(\lambda = 1) \neq mg(\lambda = 1)$$

Entonces, la matriz A no es diagonalizable.
c)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$q = -2$$

$$B = (A - qI)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/9 & -1/9 \\ 1/3 & -2/9 & 2/9 \\ -2/3 & 13/9 & -4/9 \end{bmatrix}$$

$$x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$y_1 = Bx_0 = \begin{bmatrix} 0.3333 \\ 0.3333 \\ -0.6667 \end{bmatrix} \quad u_1 = -0.6667 \quad x_1 = \frac{y_1}{u_1} = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_1 = q + \frac{1}{u_1} = -3.5$$

$$y_2 = Bx_1 = \begin{bmatrix} 0.3333 \\ 0.1667 \\ -0.8333 \end{bmatrix} \quad u_2 = -0.8333 \quad x_2 = \frac{y_2}{u_2} = \begin{bmatrix} 0.4 \\ -0.2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_2 = q + \frac{1}{u_2} = -3.2$$

$$y_3 = Bx_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.4 \\ -1 \end{bmatrix} \quad u_3 = -1 \quad x_3 = \frac{y_3}{u_3} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \lambda_3 = q + \frac{1}{u_3} = -3$$

Dado que coincide con el valor exacto, el error es cero.

Problema 4

Para encontrar una raíz α de la función f se propone el siguiente método iterativo:
Sea $x_0 \in R$ arbitrario y para $n \geq 0$, defina:

$$x_{n+1} = x_n + cf(x_n),$$

donde *c* es una constante real.

a) Si $f'(\alpha) \neq 0$, entonces para qué valores de *c* se asegura la convergencia del método propuesto. Justifique correctamente su respuesta.
b) Si $f(x) = x - \mathrm{sen}(2x)$, $c = -0.5$, $x_0 = 1$. Realice 03 iteraciones y estime el error.
c) Concuerdan los resultados obtenidos en a) y b).

Solución

a) El método encaja en la familia de los métodos de punto fijo, con $g(x) = x + cf(x)$. Por lo tanto este método converge cuando $|g'(x)| = |1 + cf'(x)| < 1$. Así tenemos que:

$$-1 < 1 + cf'(x) < 1 \Leftrightarrow -2 < cf'(x) < 0.$$

Tomado $x = \alpha$ y sabiendo que $f'(\alpha) \neq 0$, tenemos que:

$$-\frac{2}{f'(\alpha)} < c < 0, \text{ Cuando } f'(\alpha) > 0$$

$$0 < c < -\frac{2}{f'(\alpha)}, \text{ Cuando } f'(\alpha) < 0$$

b)

$$x_1 = x_0 - \mathrm{sen}(x_0) = 0.9546$$

$$x_2 = 0.9490$$

$$x_3 = 0.9480$$

$$err = |x_3 - x_2| = 0.0010$$

c)

$$f'(x) = 1 - 2\cos(x)$$

$$f'(1) = 1.8323$$

$$\frac{-2}{f'(1)} = -1.0915 < c < 0$$

Dado que c esta en el rango la convergencia se verifica.

Los Profesores